Scoop

Oplage 450
Verschijning oktober 2003

Hoofdredactie

Charles Mathy

Eindredactie

Jorn Mossel

Redactie

Paul Friedel, Zdenko van Kesteren, Vincent van der Noort, Lydwin van Rooyen

Redactieadres

Studievereniging NSA
Universiteit van Amsterdam
Nieuwe Achtergracht 170
1018 W V Amsterdam
tel: 020-525 5882
mail: scoop@science.uva.nl
www.science.uva.nl/student/scoop

Contributies

Hendrik van Eerten

Subsidies

ITF, WZI, KdVI, Philips

Ontwerp

Charles Mathy

Scoop is het blad van de studievereniging NSA. Het is gratis voor alle studenten en medewerkers van de studies natuurkunde, sterrenkunde, wiskunde en statistiek aan de Universiteit van Amsterdam. Losse nummers kunnen bij de redactie worden aangevraagd.

Lees dit niet, het is saai

Na een tijdje gaat elke kolom twijfelen over het nut van haar bestaan. Zeker sinds er binnen de Scoopredactie ontevredenheid is geuit over de kwaliteit van het woord van de redactie. Het is altijd een magere samenvatting van de artikels, en voegt niets toe aan de Scoop.

Oké, dan pakken we het anders aan. We gaan proberen één van de moeilijkste problemen van de makers van het woordenboek op te lossen: intelligentie definiëren.

Laten we beginnen met het opmerken dat intelligentie op zich niet zo nuttig is als de herkenning van intelligentie. Als je iedereen om je heen kunt laten geloven dat je slim bent, wat zou je dan nog meer willen?

Wat moet je nu doen om slim over te komen? Volgens mij is een brede culturele kennis de sleutel, zodat je ieder gesprek aankunt. Je moet iets inhoudelijks te zeggen hebben over allerlei onderwerpen. Je komt niet zomaar weg met aan de zoveelste politieke gesprek alleen bij te dragen met een Bush quote: “The problem with the French is that they don’t have a word for entrepeneur” (ik wel).

Daar gaat deze Scoop over: een brede culturele kennis opbouwen, op het gebied van de wetenschap. Je wordt in deze Scoop goed gewapend voor een klant-en-klaar gesprek met zinnen als “een touw hangt als een cosinus hyperbolicus” en “*(pÉq) É ((rÚp) É (rÚq))*”.

Misschien kan dit stukje wel aan de Scoop bijdragen, als hier ook een beetje trivia worden behandeld.

-Waarom hebben zebra’s strepen? Tsétsé vliegen verwarren ze dan met de achtergrond.

-In Las Cruces, New Mexico, is het illegaal om een lunchbox door een grote straat te sjouwen.

-In de theorie van de quantumchromodynamica trekt een rode quark een antirode antiquark aan.

-3 landmijl is gelijk aan 15840 voet.

Genoeg voor vandaag. Voor meer dan teveel trivia, ga naar http://www.funtrivia.com.

Als laatste een geweldige ollekebolleke van Laura van der Noort (wat is een ollekebolleke ook alweer? Kijk op de Scoop website naar de laatste twee Scoops). Blijf ze opsturen! – Charles Mathy

Waar ligt de toekomst nou?
Wibauthuis, B-gebouw…
Beide geen toonbeeld van
Schoonheid en sfeer.

Is er geen plaats in het
VanderWaals-Zeemanlab?
‘k Heb liever asbest dan
Watergraafsmeer.

Scoop vult de gaten

Zoals beloofd komt de Scoop dit keer met een antwoord op brandende vragen. Werp een blik op de drie stellingen: de mysterieuze steunpilaar van de quantummechanica (blz.11); die van Noether over tafelvoetbalende mariniers (blz.3); die van Gödel over of “deze zin is niet waar” waar is (blz.21).

17 Flex mech

Hoe flex is een touw? Leer hier hoe je de vorm van een hangend touw bepaalt. Die vorm is flex genoeg voor een stevig gebouw (zie voorkant).

14 Jij ook naar CERN?

Ervaar hier de spannende avonturen van een student die het CERN zomerstudentschap tot het uiterste heeft benut. Hij vertelt je ook hoe jij een vervolg op die avonturen kunt beleven.

Paul Friedel

Het Noethertheorema

Welke natuurkundestudent heeft er niet van het Noethertheorema gehoord? Er wordt op geheimzinnige toon over gesproken door docenten die, als het erop aankomt, nooit vertellen hoe het nu precies zit. In de serie Scoop vult de gaten in je kennis deze keer de ins and outs van het Noethertheorema. Om maar meteen met de deur in huis te vallen geef ik hier het theorema:

<u>Noethertheorema:</u>
Iedere symmetrie van een fysisch systeem correspondeert met een behouden grootheid, en voor iedere behouden grootheid is er een symmetrie van het systeem te vinden.

Een voorbeeld
Dit is natuurlijk volstrekt onbegrijpelijk, maar het wordt duidelijker aan de hand van een voorbeeld. Stel nu dat we een systeem hebben dat translatie-invariantie heeft, denk bijvoorbeeld aan een spelletje tafelvoetbal dat door militairen op een vliegdekschip gespeeld wordt. Als het schip rustig vaart, maakt het voor het spelletje niets uit hoe hard het schip gaat, het zou evengoed in de haven kunnen liggen als met 50 knopen richting de Perzische Golf stomen. Het schip als geheel kun je eenparig laten bewegen zonder dat de mechanica op het schip verandert. De behouden grootheid die hiermee correspondeert, is impuls. Dit is eenvoudig in te zien. Als het schip met constante snelheid (constante impuls) voortbeweegt is er geen netto kracht die op het schip werkt. Maar een frame waarop geen kracht werkt, is ‘ontkoppeld’ van de omgeving. In zo’n *inertiaalframe* zijn de drie wetten van Newton geldig. Nu weten we ook dat het onmogelijk is vast te stellen wat de absolute positie van zo’n frame is, want dan zou je immers een referentiepunt moeten hebben dat buiten het frame ligt, maar welk referentiepunt zou daarvoor in aanmerking komen? Je kunt bijvoorbeeld de positie ten opzichte van de noordpool bepalen, maar er is geen objectieve reden te bedenken waarom juist dat een referentiepunt zou moeten zijn. Het zou net zo logisch zijn om Zutphen of de Bermudadriehoek als referentie te nemen. We kunnen dus concluderen dat voor een eenparig bewegend frame, alleen de afstanden binnen dat frame relevant zijn. De positie van het frame ten opzichte van de rest van het heelal doet niet ter zake.
Het bovenstaande voorbeeld is niet echt bevredigend. Eigenlijk is de argumentatie een cirkelredenering (huiswerk: zoek de logische fouten in bovenstaand stukje, het wringt bij de definitie van een inertiaalframe). Maar ook zonder al dit redeneren en interpreteren is de stelling van Noether te begrijpen. Het is dan wel nodig om het *Lagrangeformalisme* te gebruiken.

Lagrangeformalisme
We definiëren een functie, de Lagrangiaan, als volgt:

$$L = E_{kin} - E_{pot} = L(q, \dot{q}, t) \, .$$

De Lagrangiaan is een functie van de positie q, de snelheid $\dot{q}$ en de tijd t. Het is ook mogelijk om nog hogere orde tijdsafgeleiden te gebruiken, maar dit is meestal niet nodig en maakt de zaak er voor ons niet helderder op, dus vergeten we dat maar even. Verder definiëren we de *actie* als:

$$S = \int L dt \, .$$

We gebruiken nu een duivelse truc: het variatieprincipe. Dit principe stelt dat de evolutie van een systeem altijd zodanig is dat de actie extremaal is. We zullen dit nu nader bekijken. De Lagrangiaan is een functie van q, die op zichzelf weer een functie van t is. Stel nu dat de juiste oplossing voor $q(t)$ gegeven wordt door q_c. Dat de actie extremaal is, wil zeggen dat de actie niet verandert onder een kleine verandering in q, ofwel

$$q_c \rightarrow q_c + dq \quad \Rightarrow \quad dS = 0 \, .$$

Als we dit uitwerken, vinden we de bewegingsvergelijking voor de plaats q:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \, .$$

Deze vergelijking heet de *Euler-Lagrange vergelijking*, voor een afleiding hiervan, kijk in [1]. Het is eigenlijk niet duidelijk waarom een systeem nu voldoet aan het variatieprincipe, maar het blijkt erg goed te werken. Een soortgelijke truc kun je ook toepassen om de brekingswet van Snellius af te leiden. Als je de tijd uitrekent die licht nodig heeft om van de ene plaats naar de andere te komen, terwijl de brekingsindex niet overal gelijk is, volgt licht altijd het pad dat de minste tijd kost. Dit principe levert, als je even doorrekent, de wet van Snellius op. De actie S speelt hier de rol van totale tijd en het ‘pad’ is gegeven door de waarde van $q(t)$ op ieder tijdstip.
Het is niet zo heel erg dat de werking van het actieprincipe niet duidelijk is, want vaak kun je aantonen dat de Lagrangeformulering equivalent is met de ‘originele’ formulering. Voor een bewijs dat dit geldt voor systemen die voldoen aan de Newtoniaanse mechanica, zie [1].
Stel nu dat we een specifieke variatie van q kiezen,

$$q \rightarrow q + dq = q + x dq \, ,$$

met x infinitesimaal. De grootheid dq hoeft niet klein te zijn. We nemen nu aan dat deze transformatie een symmetrie is, ofwel: de bewegingsvergelijking van het systeem verandert niet als we $x dq$ toevoegen. Dit is het geval als de verandering in L nul is. Deze verandering in L kunnen we uitrekenen:

$$
\begin{aligned}
dL &= \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} \\
&= x\left(\frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial}{\partial t}dq\right) \\
&= x\left(\frac{\partial L}{\partial q}dq - \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dq + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq\right)\right) \\
&= x\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq\right)
\end{aligned}
$$

In de laatste stap gebruikten we de bewegingsvergelijking. Als we nu willen dat $dL=0$ dan moet gelden:

$$
x\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq\right) = x\,\frac{\partial Q}{\partial t} = 0\,.
$$

Deze definitie van Q, laat zien dat Q behouden is. We noemen Q vaak de *lading*. De elektrische lading van een systeem is inderdaad behouden onder bepaalde voorwaarden en dan kunnen we die vinden met behulp van het Noethertheorema, maar in het algemeen kan Q van alles zijn.

Een ingewikkelder voorbeeld

Misschien ben je onderhand de draad een beetje kwijt, maar aan de hand van een voorbeeld wordt duidelijk wat de verschillende begrippen betekenen. Stel, we hebben een planeet die om de zon draait. We gaan ervan uit dat de zon zo zwaar is dat we de beweging hiervan mogen verwaarlozen. De Lagrangiaan is nu

$$
L = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^{2} + \frac{mMG}{|q|}\,,
$$

met M de massa van de zon en m de massa van de planeet. Deze Lagrangiaan is invariant onder rotaties in het bewegingsvlak (xy) van de planeet

$$
q \to R(q) \quad \Rightarrow \quad dL = 0
$$

Een infinitesimale rotatie om de z-as kunnen we schrijven als

$$
dq_j = x e_{ijz} q_i\,.
$$

We hebben het Levi-Cevita-symbool gebruikt, dit is gedefinieerd als

$$e_{xyz} = e_{yzx} = e_{zxy} = +1$$

$$e_{zyx} = e_{yxz} = e_{xzy} = -1$$

$$e_{xxz} = e_{yyy} = \ldots = 0$$

We sommeren over iedere index die dubbel voorkomt (in dit geval i). Voor de x-component van dq hebben we bijvoorbeeld:

$$dq_x = x(q_x - q_y).$$

(huiswerkopgave 2: controleer dat de formule voor dq_j inderdaad klopt)
De behouden lading is nu gemakkelijk te vinden.

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} dq_j = m\dot{q}_j e_{ijz} q_i = (\mathbf{q} \times \mathbf{p})_z$$

Het Levi-Cevita-symbool levert precies het uitproduct op en Q is dus niets anders dan de draaiimpuls in de z-richting!

Het omgekeerde geval
De stelling van Noether zegt ook dat het mogelijk is om bij een gegeven behouden grootheid de bijbehorende symmetrie te vinden. In de quantummechanica is dit mooi te zien. Stel, we hebben een systeem met impulsbehoud. We weten dat in de quantummechanica iedere grootheid met een operator correspondeert. In dit geval hebben we:

$$\hat{P}_x \Leftrightarrow \frac{\hbar}{i} \partial_x$$

We gaan nu de operator in een complexe e-macht zetten en de Taylorreeks bepalen: (het wordt zo meteen duidelijk waarom we dit doen)

$$e^{ib\hat{P}_x} = \sum_n \frac{1}{n!} \left(ib\hat{P}_x\right)^n = \sum_n \frac{1}{n!} (\hbar b)^n (\partial_x)^n ,$$

met b gewoon een getal. Niets bijzonders. Maar kijk nu eens naar een translatie, $x \rightarrow x + a$. Voor de golffunctie van het systeem geldt dan, als we weer de Taylorreeks opschrijven,

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x+a) = \sum_n \frac{1}{n!} a^n (\partial_x)^n \Psi(x).$$

Deze uitdrukking is hetzelfde als de e-macht die we net uitschreven, met $a = \hbar b$. We zien dus dat de translatie wordt gegenereerd door de impulsoperator in een e-macht te zetten en te laten werken op de golffunctie:

$$e^{ib\hat{P}_x} \Psi(x) = \Psi(x + \hbar b).$$

Er is dus een duidelijke correspondentie tussen translaties en impuls. Dit komt natuurlijk over als gegoochel, maar het is mogelijk om aan te tonen dat deze procedure de juiste symmetrie oplevert voor alle quantummechanische grootheden die behouden zijn. Het bewijs is echter te ingewikkeld om hier te kunnen behandelen. Kijk bijvoorbeeld in [2].

Voor de echte *diehards*, quantumveldentheorie

In de klassieke natuurkunde is het Lagrange-formalisme een mooi hulpmiddel om op een geünificeerde manier over dynamica te praten, maar we kennen over het algemeen ook de onderliggende vergelijkingen van het systeem. De bewegingsvergelijking kan ook worden gevonden zonder het formalisme te gebruiken, in ons voorbeeld door gewoon Newtoniaanse mechanica toe te passen. In de quantumveldentheorie (QFT, quantummechanica voor gevorderden) kan dit niet. De actie is niet slechts een hulpmiddel, maar een uitgangspunt voor de theorie. Er is wellicht niet eens een onderliggende mechanica. Een gemiddeld model in de QFT doorloopt de volgende stadia

1. Men neme een actie, eventueel gemotiveerd door fysische intuïtie.
2. Bereken de bewegingsvergelijking.
3. De waarde van alle fysische parameters die uit de actie volgen, is oneindig (zogenaamde *divergenties* zijn een standaard probleem in de QFT, maar ze kunnen worden opgelost, zie stap 4).
4. Trek oneindig van deze waarden af, de theorie is nu *gerenormaliseerd*. (Zo rücksichtlos gaat het er niet echt aan toe in de QFT, maar echt netjes gaat alles ook niet in zijn werk, wiskundig gezien.)
5. Vergelijk de gerenormaliseerde parameters met de meetwaarden.
6. Herhaal stap 1 t/m 5 totdat het gewenste resultaat is bereikt.

De actie is dus alles wat er bekend is van het systeem. Onderliggende wetten (zoals de Newtoniaanse mechanica) zijn niet bekend. Toch leidt QFT tot mooie resultaten.

Een van de belangrijkste eigenschappen van de moderne QFT is dat alle modellen verenigbaar zijn met de speciale relativiteitstheorie, in tegenstelling tot de ‘klassieke’ quantummechanica. Dit zorgt ervoor dat de Lagrange-theorie er iets anders uitziet dan het klassieke geval, maar het principe blijft hetzelfde. We vervangen alleen de Lagrangiaan door een Lagrangedichtheid ℓ, die vaak ook weer gewoon Lagrangiaan wordt genoemd. De actie is dan gegeven door

$$S = \int \ell d^4 x \, .$$

We integreren over de ruimte- en tijdcoördinaten. Dit is eigenlijk hetzelfde als de klassieke Lagrangiaan, alleen werken we hier met energiedichtheden, die we vervolgens weer over de ruimte integreren. De kinetische term in de Lagrangiaan wordt vervangen door een term met afgeleiden, zoals

$$-\partial_m j \partial^m j \, .$$

We sommeren weer over de index, maar dit keer loopt m over de ruimteco-ordinaten en over de tijdcoördinaten met een minteken. Hierboven staat dus

$$\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} - \nabla^2 j \ .$$

De variabele j is de waarde van het quantumveld. Dat is vergelijkbaar met een elektrisch of een magnetisch veld, alleen is de interpretatie veel lastiger, maar daar hoeven we ons niet druk om te maken. Het veld j speelt de rol die q in het klassieke geval speelde. Een typische QFT Lagrangiaan (deze beschrijft elektronen en positronen) ziet er zo uit:

$$\ell = -\overline{\Psi}_a \left(g^{m}_{ab} \partial_m + m\mathbf{1}_{ab} \right) \Psi_b \ .$$

y_a is een vector met 4 componenten, g^{m}_{ab} is een 4x4 matrix (voor iedere m een andere matrix), $\mathbf{1}_{ab}$ is de eenheidsmatrix en de vector $\overline{\Psi}_a$ is gedefinieerd door

$$\overline{\Psi}_b = i\Psi^{\dagger}_a g^{0}_{ab} \ .$$

Deze vectoren leven niet in de normale vierdimensionale ruimte, het zijn zogenaamde *spinoren*. Die lijken wel op vectoren, maar gedragen zich anders onder rotaties en dat is precies wat elektronen ook blijken te doen. Dit vreemde gedrag wordt veroorzaakt door het feit dat elektronen *fermionen* zijn. Bosonen zijn veel gemakkelijker te beschrijven in de QFT.
We hebben nu twee paar indices, een stel voor de spinorruimte (ab) en een ander stel voor de 'gewone' ruimte (m). Omdat de vectoren imaginaire getallen kunnen bevatten, heeft deze Lagrangiaan een bijzondere invariantie. Stel nu dat we y_a vermenigvuldigen met een imaginaire e-macht

$$\Psi_a \to e^{ia}\Psi_a \ , \qquad \overline{\Psi}_a \to \overline{\Psi}_a e^{-ia} \ ,$$

Met a een constante. We noemen dit een *U(1)*-transformatie. In plaats van een behouden lading, vinden we een 'behouden' stroom:

$$j^m = \frac{\partial \ell}{\partial\left(\partial_m \Psi_a\right)} d\Psi_a \ , \qquad \partial_m j^m = \partial_x j^x + \partial_y j^y + \partial_z j^z - \partial_t j^t = 0 \ .$$

De lading is dan

$$Q = \int j^t d^3 x \ ,$$

(huiswerkopgave 3: laat zien dat de tijdsafgeleide van Q inderdaad nul is, gebruik de stelling van Gauss). De stroom wordt in dit geval gegeven door (geen afleiding)

$$j^m = -i\overline{\Psi}_a g^{m}_{ab} \Psi_b \ .$$

en de lading is

$$Q = \int d^3 x \Psi^{\dagger}_a \Psi_a \ .$$

Je ziet, in de QFT is het niet altijd direct duidelijk wat je je nu precies fysisch moet voorstellen. Het blijkt dat deze lading het aantal elektronen min het aantal positronen telt. Q is dus evenredig met de elektrische lading van het systeem, want elektronen hebben lading *-1* en positronen lading *+1*. In dit voorbeeld is het nog precies te zeggen wat de interpretatie van de lading Q is, maar over het algemeen is dat heel moeilijk. Het Noethertheorema helpt ja dan bij het vinden van die ladingen en symmetrieën.
Het is duidelijk dat we nog wel even door kunnen gaan met het behandelen van voorbeelden van toepassingen van het Noethertheorema en symmetrie (zie illustratie), maar waarschijnlijk is je uithoudingsvermogen inmiddels afdoende op de proef gesteld. In elk geval kun je nu zelf de beweringen van je docenten over het Noethertheorema narekenen, als je wilt…

Emmy Noether

Emmy Amalie Noether werd in 1882 geboren in Erlangen, Duitsland. Haar vader (Max Noether) was een gewaardeerd wiskundige aan de universiteit van Erlangen. In 1900 kreeg ze haar diploma als lerares Frans en Engels. Ze besloot echter geen les te gaan geven, maar wiskunde te gaan studeren. Het probleem was dat ze een vrouw was. Vrouwen mochten in Duitsland wel studeren, maar voor ieder college moest de betreffende professor persoonlijk toestemming geven. Haar studie liep goed en in 1903 vertrok ze naar Göttingen, waar op dat moment vele grote wetenschappers werkten, zoals Hilbert, Klein en Minkowski. Nadat ze haar doctorstitel had behaald (in Erlangen) kon ze formeel niet verder werken in de wiskunde. Een 'postdoc'-plaats was aan vrouwen niet toegestaan. Ze bleef daarom in Erlangen om haar vader te helpen. Haar talent viel echter op: ze werd uitgenodigd lid te worden van de *Deutsche Mathematiker Vereinigung* en in 1913 gaf ze colleges in Wenen. In 1915 vroegen Hilbert en Klein of ze weer naar Göttingen wilde komen. Ze mocht daar geen college geven, maar dat probleem werd opgelost door de colleges onder de naam van Hilbert te laten plaatsvinden. Noether was slechts assistent, maar in de praktijk deed ze al het werk.
De afleiding van het *theorema van Noether* was één van de eerste dingen die ze deed in Göttingen. In 1918 werd een artikel over de afleiding gepubliceerd [3]. Later heeft ze nog belangrijk werk verricht in de theorie van idealen en ringen, maar haar precieze bijdragen zijn moeilijk te achterhalen, omdat ze vaak niet onder haar eigen naam kon publiceren. Veel van de resultaten die ze boekte zijn daarom verschenen onder de naam van mannelijke professoren of zelfs studenten.
In 1933 werd Noether door de Nazi's gedwongen om haar positie in Göttingen op te geven vanwege haar Joodse achtergrond. Ze vertrok naar Noord-Amerika, waar ze ondermeer aan het *Institute for advanced Study* heeft gewerkt. In 1935 stierf ze.

Meer lezen

[1] J.B Marion & S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Saunders College Publishing, 1995

[2] H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Institute of Physics, 1998

[3] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. v.d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1918, p. 235-357
Het artikel is in het Duits geschreven, maar vrij goed te volgen. Het is te vinden in de Artisbibliotheek, maar bij de auteur van dit artikel is ook een kopie te krijgen. Mail hiervoor naar scoop@science.uva.nl

[4] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Noether_Emmy.html
Op de website van St. Andrews University in Schotland is een mooie verzameling biografieën van wiskundigen te vinden en een hoop leuke informatie er omheen. Een echte aanrader.

[5] http://www.emmynoether.com
Niet echt geweldige informatie, maar wel makkelijk te onthouden en de website linkt zelf weer door naar andere sites.

De algemene relativiteitstheorie (ART) is af te leiden als je de eis stelt dat alle fysica door middel van één formalisme beschreven moet kunnen worden, onafhankelijk van het frame waarin dat plaatsvindt. Zo moet bijvoorbeeld de beschrijving in bolcoördinaten hier op aarde overeenkomen met die in een versnellend cartesisch coördinatensysteem met de oorsprong op Mars. Deze symmetrie (onder algemene coördinatentransformaties) is alles wat nodig is om de ART af te leiden.

Binnen het vakgebeid van de kosmologie is de situatie helemaal mooi, het blijkt namelijk dat het heelal op grote schaal homogeen is (translatieinvariant) en isotroop (rotatieinvariant). Dit zorgt ervoor dat de Einsteinvergelijkingen van de ART een stuk vereenvoudigd kunnen worden.

Op dit plaatje is *gravitational lensing* te zien. Licht van sterrenstelsels wordt afgebogen in het gravitatieveld van dichterbij gelegen stelsels. Dit effect wordt door de ART voorspeld en is dus uiteindelijk slechts een symmetrie-effect.

Vincent van der Noort

Het gevoel van eigenwaarden van David J. Griffiths

De wiskundigen onder jullie zal de naam waarschijnlijk weinig zeggen, maar onder natuurkundigen is David J. Griffiths (‘The DJ’ voor intimi) een graag geziene gast. Met zijn losse, soepele, kindvriendelijke maar toch zeer gedegen manier van schrijven over natuurkunde, heeft hij via zijn standaardwerken over ‘Quantum’ en ‘Electro’ al menig jongens- en meisjeshart sneller doen kloppen. Soms (en zeker waar het wiskunde betreft) is zijn stijl misschien iets té soepel en kindvriendelijk en kan het gebeuren dat een student na het lezen van de uitspraak ‘Uit de lineaire algebra weten we…’ plotseling wordt overvallen door de paniekerige gedachte: ‘Wacht eens even, wacht eens even… DAT WEET IK HELEMAAL NIET!!’. Gelukkig is daar de Scoop om deze gaten in onze kennis op te vullen. Vandaag bewijzen we de intrigerende stelling die genoemd wordt in exercise 3.40 van ‘Introduction to Quantummechanics’ en waar vele van onze lezertjes zich jarenlang het hoofd over hebben gebroken:

Stelling 1: Als twee hermitische matrices commuteren, dan hebben ze een verzameling gemeenschappelijke eigenvectoren, die bovendien de ruimte opspannen.

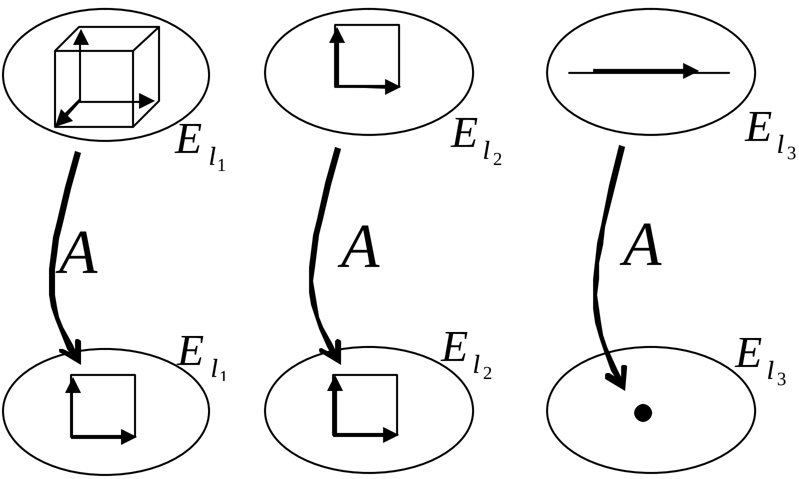
Met ‘de ruimte’ bedoelen we hier dit keer niet het heelal, maar een eindig dimensionale, complexe vectorruimte waar deze matrices op werken.
Ter herinnering: een operator A heet hermitisch als geldt $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ voor alle vectoren **v** en **w**, waarbij $\langle .,. \rangle$ het inproduct op je ruimte is. Twee operatoren A en B commuteren als AB = BA . In het algemeen commuteren operatoren niet (denk bijvoorbeeld aan plaats en impuls in quantummechanica, of aan rotaties in $\mathbb{R}^3$), maar soms heb je geluk. Een eigenvector van een operator A tenslotte, is een niet-nul vector **v** die door A wordt afgebeeld op een veelvoud van zichzelf: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, met λ een (complex) getal dat de eigenwaarde (van A, behorend bij **v**) genoemd wordt.

Een mooie eigenschap van hermitsche operatoren is dat hun eigenvectoren de ruimte opspannen (‘The eigenvectors span the space’, zoals de DJ dat zo kernachtig weet uit te drukken). Het bewijs is op de Scoop website terug te vinden. Dit noemen we voor later gebruik Stelling 2.

De clou in het bewijs van Stelling 1 zit hem in het begrip ‘Eigenruimte’. Als v_1 en v_2 twee verschillende eigenvectoren van B zijn die allebei toevallig dezelfde eigenwaarde λ hebben, dan ziet men eenvoudig in dat iedere lineaire combinatie $\mu_1\mathbf{v_1} + \mu_2\mathbf{v_2}$ óók een eigenvector van B met eigenwaarde λ is. Alle eigenvectoren met een bepaalde eigenwaarde λ vormen samen dus een deelvectorruimte E_λ, die de eigenruimte van λ genoemd wordt.

Stel nu dat A en B twee hermitische, commuterende matrices zijn op een vectorruimte V en dat **v** een eigenvector is van B met eigenwaarde λ. We bekijken wat operator B doet met de vector A**v**.
We vinden: $B(A\mathbf{v}) = (BA)\mathbf{v} = AB\mathbf{v} = A\,l\,\mathbf{v} = l\,(A\mathbf{v})$. In andere woorden: A**v** is een eigenvector van B met eigenwaarde λ. Maar dat was **v** zelf ook al! A beeldt eigenvectoren van B met eigenwaarde λ dus af op eigenvectoren van B met eigenwaarde λ, dus in plaats van als afbeelding van de gigantische ruimte V naar zichzelf, kunnen we A ook opvatten als een afbeelding van de veel kleinere, beschaafdere, ja misschien zelfs wel 4- of 5-dimensionale ruimte E_λ naar zichzelf.

Omdat A nog steeds hermitisch is, heeft hij (volgens Stelling 2) een basis van eigenvectoren die de hele ruimte E_λ opspannen. En omdat deze eigenvectoren van A elementen van de eigenruimte E_λ van B zijn, zijn het zeker ook eigenvectoren van B. Het zijn dus 'gemeenschappelijke eigenvectoren'. Dit grapje kunnen we vervolgens herhalen voor iedere eigenruimte E_λ van B. Omdat de eigenvectoren van B de ruimte opspannen, iedere eigenvector in een ruimte E_λ ligt en iedere E_λ wordt opgespannen door een verzamelingetje gemeenschappelijke eigenvectoren van A en B, volgt dat de ruimte V inderdaad een basis heeft van gemeenschappelijke eigenvectoren. We kunnen dus allemaal met een gerust hart gaan slapen; the DJ had weer eens gelijk.



De E_l zijn de eigenruimtes van B, en ze spannen de hele vectorruimte op. Laat A nu los op zo'n E_l : dan kom je weer in (een deelruimte van) E_l terecht. Kijk nu naar de werking van A op een E_l en vergeet de rest van de ruimte: A is hermitisch, dus volgens Stelling 1 spannen zijn eigenvectoren die E_l op. Maar die eigenvectoren zijn ook eigenvectoren van B, omdat ze in E_l zitten. Zo maken we voor elke E_l een stel gemeenschappelijke eigenvectoren van A en B, die E_l opspannen.

Het oneindig-dimensionale geval

Een interessante vraag is natuurlijk wel, of dit ook in *on*eindig dimensionale vectorruimtes werkt. Oneindig dimensionale vectorruimtes zijn immers de ruimtes waar het in de quantummechanica om draait. Helaas is het antwoord in het algemeen: nee.

Om een tegenvoorbeeld te construeren moeten we kijken waar we nou gebruiken dat V eindig dimensionaal is. Om Stelling 2 te bewijzen (the eigenvectors span the space) gebruikt men dat iedere operator op een eindig-dimensionale vectorruimte minstens 1 eigenvector heeft. Op een oneindig-dimensionale hoeft dit niet te gelden.

Definitie: De vectorruimte ℓ^2 bestaat uit oneindige rijtjes reële getallen (a_1, a_2, a_3, a_4, …) met de eigenschap dat $\sum a_i^2 < \infty$. Hierop is als volgt een inproduct gedefinieerd: als $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ en $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ dan is
$\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots$
De lezer mag zelf nagaan dat dit inderdaad een vectorruimte is, en dat de inproducten altijd eindige getallen opleveren.

ℓ^2 is de natuurlijke generalisatie van de ruimtes $\mathbb{R}^n$: deze bestaan immers ook uit rijtjes getallen met dit inproduct.

Op deze ℓ^2 definiëren we de operator T met de volgende werking:
$T(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$.

T is hermitisch: $< Ta, Tb >=< a, b >= \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.

Bovendien heeft T geen eigenvectoren, buiten de nulvector.
Stel namelijk dat a wél een eigenvector van T is, dus $Ta = \lambda a$.
Als $\lambda \neq 0$ zien we dat $0 = \lambda a_1$ dus $a_1 = 0$. Maar omdat $a_1 = \lambda a_2$ volgt dat $a_2 = 0$ en zo verder. Uiteindelijk vinden we dus dat $a = (0, 0, 0, \dots)$.

In het geval dat $\lambda = 0$ volgt dit ook: in dat geval is $Ta = (0, 0, 0, \dots)$ dus $a = (0, 0, 0, \dots)$. Alle eigenvectoren van T zijn dus gelijk aan de nulvector. Omdat de nulvector in zijn eentje nooit een hele oneindig dimensionale vectorruimte op kan spannen, is hij een tegenvoorbeeld tegen Stelling 2.

Om nu te bewijzen dat Stelling 1 niet geldig is in ℓ^2, hebben we alleen nog maar een hermitische operator nodig die met T commuteert. Onder het motto ‘waarom moeilijk doen als het ook flauw kan’ nemen we hiervoor de identiteitsoperator I.

I en T zijn twee commuterende hermitische operatoren op een Hilbertruimte, maar hun gemeenschappelijke eigenvectoren spannen allerminst de ruimte op: hun enige gemeenschappelijke ‘eigenvector’ is namelijk (0, 0, 0, …).

Het feit dat de gebruikte Hilbertruimte eindige dimensie heeft is dus van wezenlijk belang. Wat deze stelling dan met quantummechanica te maken heeft, waar alles toch om oneindig dimensionale Hilbertruimtes draait, is dan ook een gapend gat in mijn kennis.

Zdenko van Kesteren

CERN zomerstudentschap

Dat CERN een van de grootste wetenschappelijke centra in Europa is wisten de meesten al, maar dat natuurkundestudenten soms de kans krijgen om daar een zomer te vertoeven is niet iedereen bekend. De masterstudenten (Astro-Particle Physics hebben er afgelopen zomer gezeten als onderdeel van hun curriculum, één hiervan vertelt over zijn ervaringen.

Wat is CERN

CERN is de Europese organisatie voor nucleair onderzoek, iets buiten Genève, Zwitserland, gelegen. Het is 's werelds grootste centrum voor deeltjesfysica. Het is hier waar natuurkundigen onderzoeken waar materie uit bestaat en welke krachten hier een rol in spelen.
CERN is er hoofdzakelijk om de natuurkundigen te voorzien van de nodige apparatuur: de versnellers. Deze versnellen deeltjes tot bijna de snelheid van het licht om ze vervolgens te laten botsen. Er zijn detectoren om de brokstukken die ontstaan bij deze botsingen te laten zien. Hieruit proberen de natuurkundigen op te maken wat de eigenschappen van de deeltjes zijn en welke wetten er gelden tijdens de botsing.
CERN is gebouwd in 1954, kort na de tweede wereldoorlog. Dit laboratorium was Europa's eerste gezamenlijke organisatie waar tegenwoordig 20 lidstaten aan meewerken.

Zomerstudentschap

Elk jaar nodigt CERN zo'n 150 studenten uit om een aantal weken onderzoek te doen en daar te proeven van het wetenschappelijke leventje. Het zijn studenten natuurkunde, computer sciences en techniek die hiervoor in aanmerking komen. Deze studenten wordt een project aangeboden waarin ze hun tanden kunnen zetten. Daarnaast worden er lessen gehouden in een breed scala aan vakken, nagenoeg elk vakgebied passeert de revue. Tenslotte worden er workshops en rondleidingen verzorgd zodat de studenten ook eens van dichtbij kunnen bekijken waar de wetenschappers nou precies mee bezig zijn.
Dus een van de doelen van het zomerstudentschap is de student te laten zien hoe wetenschap er op CERN aan toe gaat. Een ander doel, voor velen nog veel belangrijker, is het in contact komen met studenten van jouw generatie en elkaar te leren kennen. Natuurkundigen zijn immers dun gezaaid en je blijft elkaar in de toekomst tegenkomen: op conferenties en op je werk. Er wordt een basis gelegd voor je verdere loopbaan als natuurkundige.

Zomerstudentschap en de Master (Astro-) Particle Physics

Het zomerstudentschap op CERN wordt sterk aangeraden indien je ervoor kiest de master Particle Physics te gaan volgen (zie ook de studiegids). Als je ervoor kiest om je zomervakantie aan de wetenschap te besteden krijg je er naast een fantastische ervaring, een vriendenkring en meer zon dan je in Nederland kunt verwachten ook nog eens studiepunten die voor je master meetellen. Als je deze master volgt en je opgeeft voor het zomerstudentschap ben je zo goed als verzekerd van een wetenschappelijke zomer op CERN.

Het project op CERN

Iedere zomerstudent krijgt een project toegewezen, waar hij of zij individueel aan werkt. Je krijgt een begeleider die je helpt met het project. Je bent dan lid van de groep van je begeleider (zoals bijvoorbeeld ALICE, ATLAS, CMS) en dat betekend dat je meegaat naar de groepsvergaderingen en besprekingen. Sommige zomerstudenten houden dan ook wel eens een voordracht. Aan het eind van je verblijf wordt er van je verwacht dat je een (kort) verslag schrijft waarin je je werkzaamheden beschrijft. Ook wordt je de kans geboden om een voordracht over je project te houden voor al de andere zomerstudenten. (in deze paragraaf heel er veel dan's, ook's en nog's, kan je het misschien iets mooier verwoorden?)
Het type project dat je krijgt wordt beschreven door de verhoudingen *physics-engineering-computing*, in hoeverre het project echt de natuurkunde bevat of meer programmeren is. Bij je inschrijving voor het zomerstudentschap kan je aangeven wat voor een project het best bij je verwachtingen past.

De groep zomerstudenten 2003

De colleges op CERN

Zoals hiervoor gezegd, wordt er een serie lessen gegeven op CERN die bedoeld zijn om je inzicht in de deeltjesfysica te vergroten (er wordt minder in detail getreden). Deze voordrachten worden in de ochtenden gegeven gedurende zo'n 7 weken. Theorievakken zoals het Standaard Model en Kosmologie worden afgewisseld met vakken zoals Electronica, LEP-resultaten en Accelerator-fysica. Daarnaast kan je altijd op het internet kijken of er nog andere vakken gehouden worden die niet op het studentenprogramma staan, soms wordt er voor belangstellenden een college gehouden in een specifiek gebied, zoals MC-simulatie. Een vak duurt gemiddeld zo'n 3 à 4 college uren en zo'n serie wordt meestal afgesloten met de mogelijkheid om een uur lang vragen te stellen aan de docent. Nu zijn de colleges niet verplicht (maar wel aan te raden), je kunt er altijd voor kiezen om aan je project te werken.
De vakken zelf zijn voor natuurkundigen goed te volgen, zelfs een beetje makkelijk. Dit komt omdat er ook studenten een zomerstudentschap volgen die geen natuurkundige achtergrond hebben, voor hen moet de stof ook toegankelijk blijven. Het is niet de bedoeling om alles in de colleges je eigen te maken, het is meer bedoeld om een overzicht te geven over de vakgebieden van de wetenschap op CERN. En daarnaast is het ook een sociale gelegenheid om meer zomerstudenten te leren kennen.

Naast het project en college…

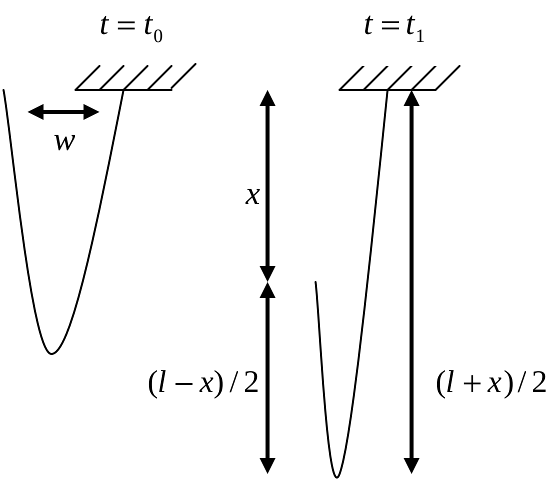
En aan sociale gelegenheden is er geen tekort op CERN. Je woont er immers met een kudde studenten in een hotel, levendig Genève op enkele bushaltes afstand en in de zomer worden er veel feesten en festivals georganiseerd. Want het blijft zomer en dat zal je merken ook: de Zwitsers weten wat feesten is. Het begint met bijvoorbeeld in Genève de *Fête de la Musique*, een groot festival door de hele binnenstad waar allerlei bandjes laten horen wat ze kunnen. Later in de zomer is Montreux zeer aan te raden met z'n *jazz festival*, erg sfeervol en opzwepend. Nog een paar weken later wordt er in Genève een week lang *Lake Parade* gevierd dat wordt afgesloten met een memorabel stukje vuurwerk boven het meer.
Hiernaast wordt er op het CERN terrein geregeld barbecues gehouden en de zomerstudenten zelf organiseren geregeld zelf ook feesten, filmavonden en etentjes. Soms, bij toeval, maak je ook nog een mijlpaal mee in de loopbaan van de bouw van een detector (de ondergrondse hal van ATLAS was af): het personeel van CERN ziet overal snel een feest in en dat kan dan groot uitpakken. Er werd zelfs een bandje ingehuurd: *Les Horribles Cernettes*, een huisbandje dat liedjes over natuurkunde en versnellers zingt.
Behalve studiepunten neem je dus een hele hoop mee naar huis: een leerzame ervaring, een hoop vrienden en een vervelend deuntje in je hoofd.

Jorn Mossel

flexibele mechanica

Klassieke mechanica gaat meestal over starre objecten. Een vallend blok, een rollende schijf of een roterende staaf. Mechanica wordt pas echt leuk als je naar flexibele objecten gaat kijken. Het meest simpele voorbeeld en ook het meest voorkomend is een touw.

Bungee jumpen (vrije val sneller dan *g*?)
We nemen een touw (niet uitrekbaar) en hangen één uiteinde vast aan een plafond. Het andere uiteinde laten we ter hoogte van het plafond los (zie fig. 1 links). We zijn met klassieke mechanica bezig dus zetten we luchtwrijving of andere nare krachten buitenspel. Hoe versnelt het uiteinde van het touw? Je zult misschien denken, sinds Galileï is bekend dat elk vrij vallend object met $g\ (=9.81\ m/s^2)$ valt, dus ook het uiteinde van het touw. Klinkt logisch maar er is meer aan de hand!
We bekijken een stuk touw van lengte $l/2$ dat op $t=t_0$ in vrije val is. Omdat het touw valt heeft het kinetische energie. Even later als $t=t_1$ is een stuk touw van lengte $x/2$ tot rust gekomen (zie fig. 1 rechts). Dit stuk touw kan geen kinetische energie meer hebben! Die kinetische energie wordt overgedragen aan de rest van het touw, dit kan alleen het nog bewegende deel zijn. Dit deel krijgt 'extra' kinetische energie en zal daardoor met een grotere versnelling dan g vallen.



Figuur 1 –
Links: Een touw waarvan één uiteinde vast zit aan een plafond wordt losgelaten.
Rechts: Het touw is inmiddels over een afstand x gevallen.

Omdat we benieuwd zijn naar de exacte bewegingsvergelijking pakken we het aan zoals het hoort.Het touw heeft potentiële energie:

$$E_{pot} = Mgh = -\tfrac{1}{4} r\, g\left(l^2 + 2lx - x^2\right)$$

Hier is $M = r\,l$ waarbij r de massa per lengte-eenheid is en l de lengte van het touw. Voor de hoogte h is het zwaartepunt van het touw als functie van x ingevuld. De kinetische energie van het touw is:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{4} r\left(l - x\right)v^2$$

Hier is $m = r\,(l - x)/2$ de massa van het bewegende deel van het touw.

Als $t = 0$ dan $x = 0$ en $E_{kin} = 0$ dus: $E_{tot} = E_{pot} = -\tfrac{1}{4} r\, gl^2$

$$E_{kin} = E_{tot} - E_{pot} \Rightarrow \tfrac{1}{4} r\left(l - x\right)v^2 = -\tfrac{1}{4} r\, gl^2 + \tfrac{1}{4} r\, g\left(l^2 + 2lx - x^2\right) \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{g\left(2lx - x^2\right)}{l - x}$$

We vergelijken dit met de snelheid v als functie van x voor een vallende bal: $v^2 = 2gx$. Om de bewegingsvergelijking als functie van t te verkrijgen moeten we de volgende intergraal oplossen:

$$t = \int_0^x \frac{1}{v} dx' \quad \Rightarrow \quad \sqrt{g}\, t = \int_0^x \sqrt{\frac{l - x'}{(2l - x')x'}} dx'$$

Substitueren we $p = 1 - x'/l$ dan krijgen we:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g}} \left(\int_0^{x/l} \sqrt{\frac{p}{2(1 - p^2)}} dp \right) = t_0\, C$$

t_0 is de tijd die een bal nodig heeft om over een hoogte l te vallen. Voor de totale valtijd vullen we in $x = l$. De integraal C loopt dan van 0 tot 1. Met Mathematica vinden we: $C \approx 0.85$. De tijd die het uiteinde van het touw nodig heeft om te vallen is dus ongeveer 15% korter dan die van een bal!

Als we het probleem in termen van krachten bekijken, moet er een extra kracht zijn naast de zwaartekracht die zorgt voor de 'extra' versnelling. In een tijdje Δt komt een stuk touw van lengte $\tfrac{1}{2} v \Delta t$ tot rust. Deze verandering van impuls zorgt voor een spankracht $F_s = \tfrac{1}{2} r\, v^2$. Deze spankracht wordt gelijk verdeeld over het vaste en vrije uiteinde van het touw.

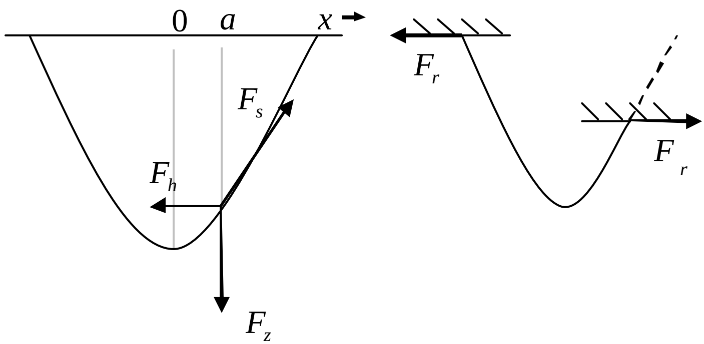
Als het touw helemaal is gevallen dan zal de snelheid en ook de kracht naar oneindig moeten gaan. Dit is natuurlijk absurd. Zit er een fout in ons model? Als je in werkelijkheid de proef zou uitvoeren zal er altijd een horizontale afstand w zitten tussen het vrije en het vaste uiteinde van het touw (dit is in fig.1

overdreven getekend). In ons model zijn we er vanuit gegaan dat w nul is. Wat gebeurt erin werkelijkheid? Zolang $x >> w$ zal het touw recht naar beneden vallen, voor dit deel gaat ons model op. Zodra $x \approx w$ zal het laatste stukje touw niet meer recht naar beneden vallen maar zal het heftig opzij zwaaien. Hier is kinetische energie voor nodig, het touw zal niet meer verder versnellen (naar beneden). Dit effect is erg goed merkbaar, je kunt het zelf uittesten met bijvoorbeeld een broekriem. Ondanks bovenstaand effect en eventuele wrijvingseffecten van het touw zelf, blijkt in de praktijk het touw nog steeds sneller te vallen dan een bal.

De klappen van een zweep kunnen we nu ook verklaren. We zwaaien de complete zweep en houden hem dan plotseling stil. Een steeds groter deel van de zweep komt in rust waarbij de kinetische energie door wordt gegeven aan het nog bewegende uiteinde.

Een stabiele kromme

We maken nu beide uiteinden van een touw met lengte l vast op afstand w aan het plafond. Welke kromme $y(x)$ beschrijft het touw? Laten we eens kijken welke krachten die erop het touw werken.



Figuur 2 –
Links: Een touw opgehangen aan het plafond.
Rechts: De kracht F_r is onafhankelijk van x.

F_z in het punt a wordt bepaald door de hoeveelheid massa die zich onder dat punt bevindt (zie fig. 2 links):

$$F_z = mg = g\,r\int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

De spankracht F_s is evenwijdig aan de raaklijn van de kromme $y(x)$. Als dit niet het geval zou zijn, zou het touw niet stil hangen. Hiermee krijgen we:

$$F_s\hat{y} / F_s\hat{x} = y'(x)$$

Omdat het touw in rust is moet de resultante kracht nul zijn, dus:

$$F_h = F_s\hat{x} \text{ en } F_z = F_s\hat{y}$$

Hier is F_h de kracht die het touw naar links trekt, veroorzaakt door het linker deel van het touw. De kracht F_h is onafhankelijk van x en is dus constant. We kunnen dit inzien door de volgende situatie te bekijken. In het linker ophangpunt van het touw werkt een kracht F_r (de reactiekracht van F_h). We knippen het touw in het rechterdeel op een willekeurige hoogte door. We laten het touw zijn vorm behouden door een kracht F_s te leveren. De horizontale component van F_s moet van dezelfde grootte zijn als F_r, de resulterende horizontale kracht is dan nul (zie fig.2 rechts). Nu we dit weten krijgen we:

$$F_h = F_s \hat{x} = \frac{F_s \hat{y}}{y'(x)} = g\, r \int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx / y'(x) = const$$

Naar x differentiëren levert de differentiaalvergelijking:

$$C\, y''(x) = \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Na wat slimme substituties krijgen we de oplossing:

$$y(x) = A \cosh(x/A) + B \qquad \text{waarbij } \cosh(x) = (e^{x} + e^{-x})/2$$

De constanten A en B worden bepaald door de lengte van het touw l en de afstand w tussen de ophangpunten. De grote truc is nu om A en B in uit te drukken in l en w. Dit is waarschijnlijk lastiger dan je denkt. Daarom wordt in praktijksituaties vaak een cosinus hyperbolicus benaderd door een parabool. Bijvoorbeeld als je wilt weten hoeveel een hoogspanningskabel doorhangt bij gegeven l en w.

Als we de situatie omdraaien, volgt dat een boog in de vorm van een cosinus hyperbolicus het meest stabiel is. Geïnspireerd door dit idee is de 190 m. hoge "gateway arch" in St. Louis ontworpen (zie fig. 3).

Figuur 3 – Het 190 m. hoge monument "the gateway arch" in St. Louis (Missouri). Zie ook de voorkant van deze Scoop.

Meer lezen
De uitgebreide versie van dit artikel is te vinden op: www.science.uva.nl/student/scoop/. Hier worden bovenstaande afleidingen stap voor stap doorgenomen. Ook staan er nog andere voorbeelden van flexibele mechanica.

Hendrik van Eerten

De stelling van Gödel

Eén van de meer tot de verbeelding sprekende stellingen uit de wiskunde is de stelling van Gödel. De stelling leert dat, gegeven een willekeurig rekenkundig systeem, het altijd mogelijk is om uitspraken te doen die, hoewel waar, nooit bewezen kunnen worden door gebruik te maken van de rekenregels die dat systeem biedt. Het is een stelling waarvan de implicaties voor de grondslagen van de wiskunde enorm zijn. Daarnaast is het natuurlijk een stelling waaraan gemakkelijk de meest wilde filosofische speculaties kunnen worden opgehangen, een beetje zoals de onzekerheidsrelatie van Heisenberg dat is binnen de natuurkunde.

In tegenstelling tot wat men misschien zou verwachten, valt de clou van het bewijs voor de stelling van Gödel vrij eenvoudig te begrijpen -dat wil zeggen, een vereenvoudigde versie ervan. Gödels oorspronkelijke artikel (*Über formal unentscheidbare Sätze der Principa Mathematica und verwandter Systeme*) is een monster met zesenveertig inleidende definities en een stel theorema's die eerst dienen te worden doorgewerkt alvorens men aan het vuurwerk toekomt. Omdat het daarnaast een voor de tijd (1931) bijzonder nieuwe redeneertrant bezigde, werd het dan ook door veel wiskundigen niet direct op waarde geschat.

Wat ik zal doen is, na een korte schets van de achtergrond waartegen het artikel uitkwam, een verkorte versie van het bewijs doornemen. Wie toevallig het helder geschreven boekje van Nagel en Newman over de stelling van Gödel heeft gelezen zal veel, zo niet alles, herkennen.

Principia Mathematica

Gödels stelling kwam op een moment waarin de grondslagen van de wiskunde sterk in de belangstelling stonden. Het besef was inmiddels doorgedrongen dat de axioma's van de wiskunde geen intrinsieke waarheden waren, maar slechts afspraken voor een vertrekpunt van het redeneren.

Een belangrijke vraag die gerezen was, was de volgende: Als we niet langer zeker kunnen zijn van de intrinsieke waarheid van een stel axioma's, hoe kunnen we dan zeker weten of ze geen tegenstrijdigheden bevatten? Om deze vraag te kunnen beantwoorden hadden de geleerden Whitehead en Russell de *Principia Mathematica* gepubliceerd, waarin ze probeerden aan te tonen dat alle rekenkundige begrippen gedefinieerd kunnen worden in zuiver logische termen. Dat zou namelijk inhouden dat de vraag naar de interne consistentie van een gebied binnen de wiskunde zou kunnen worden vertaald naar een vraag over de interne consistentie van de logica.

Consistentiebewijzen

Wanneer is een systeem consistent? Dat het in beperkte gevallen wel mogelijk is om een consistentiebewijs te leveren, wordt geïllustreerd door de elementaire propositielogica. Om de stelling van Gödel op waarde te kunnen schatten is het zeker de moeite waard om dit consistentiebewijs in detail door te nemen. Daartoe dient eerst nauw omschreven te worden wat men onder propositielogica volstaat.

Beweringen binnen de propositielogica bestaan uit drie verschillende elementen. Ten eerste zijn er de zogenaamde *veranderlijken*, de variabelen, die aan te duiden zijn met '*p*', '*q*', '*r*', enz. Om uitspraken te doen over de onderlinge verhoudingen tussen deze veranderlijken zijn *volzinsconnectieven* nodig. We onderscheiden de volgende vier (dit zijn ook de vier die gebruikt worden in de *Principia*):

'~' niet ('tilda')
'$\vee$' of
'$\supset$' indien ... dan ...
'.' en

Ten slotte zijn er nog *interpunctietekens*, om de formuleringen eenduidig te kunnen maken. Dit zijn gewoon '(' en ')'.

Het formuleren van zinnen spreekt nu voor zich. Een voorbeeld:
$((m \supset s) . (a \supset m)) \supset (a \supset s)$.

De variabelen zijn nu nog vrij in te vullen. Door '*m*' te laten corresponderen met 'mens zijn', '*s*' met 'sterfelijk zijn' en '*a*' met 'Socrates zijn', krijgen we, hoewel wat krukkig geformuleerd, het klassieke voorbeeld van de logica weer terug. Let op: er is nog niet aangenomen dat $(m \supset s)$ waar is, of $(a \supset m)$. Er wordt slechts een consequentie verbonden aan de situatie waarin ze allebei waar zijn.

Naast de elementaire tekens zijn er ook twee *transformatieregels*. De substitutieregel stelt dat je voor elke veranderlijke een volzin kunt substitueren (bijvoorbeeld '$p \supset q$' invullen voor '*r*' in '$r . l$', zodat je '$(p \supset q) . l$' krijgt). De implicatieregel stelt dat het toegestaan is om uit '*p*' en '$p \supset q$' af te leiden dat geldt '*q*'. In woorden: '*p* is waar. Indien *p* dan *q*. Dus *q* is waar'

Er zijn vier volzinnen per definitie waar, de axioma's:

1. $(p \vee p) \supset p$
2. $p \supset (p \vee q)$
3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
4. $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

Stuk voor stuk zijn dit intuïtief waarheden als koeien. Het gaat er natuurlijk om hier combinaties mee te maken die minder voor de hand liggen. Zoals '$p \supset (\sim p \supset q)$', 'indien *p*, dan volgt dat indien *niet p* geldt *q*'. Deze stelling is weliswaar niet direct uit de axioma's in te zien, maar wat wel kan, is de stelling controleren voor alle mogelijke waar/onwaar-combinaties van *p* en *q*. Een bewering die altijd waar is, noemt men wel een *tautologie*. Het valt te bewijzen dat elke tautologie valt te herleiden tot de axioma's. Controleren of we bij een bepaalde volzin met een tautologie te maken hebben, kan aan de hand van de onderstaande tabel, waarin de twee meest opmerkelijke conventies vet zijn gedrukt:

P	**Q**	$P \vee Q$	$P \supset Q$	$P.Q$	$\sim P$
T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T

Aan de hand van de uitspraak '$p \supset (\sim p \supset q)$', valt aan te tonen dat de propositielogica consistent is. Dit bewijs gaat als volgt. In een niet consistent zijn systeem bestaat de mogelijkheid om in ieder geval één formule S af te leiden die tegelijk met zijn ontkenning ~S waar is. Door S in te vullen voor *p*, volgt direct dat het hek van de dam is. Immers, *q* blijkt dan altijd waar te zijn omdat aan beide 'indien'-voorwaarden is voldaan, en volgens de transformatieregel mag voor q elke willekeurige formule in worden gevuld. Met andere woorden: in een niet-consistent systeem kan elke willekeurige formule bewezen worden uit de axioma's.

De bovenstaande stelling heeft een inverse. Zodra er ook maar één formule bestaat die niet kan worden afgeleid uit de axioma's, is het systeem consistent. Het vinden van zo'n formule is niet moeilijk. Zoals eerder gezegd valt elke tautologische uitspraak te herleiden tot de axioma's. Het is andersom ook het geval dat elke combinatie die we uit de axioma's afleiden een tautologie is. In jargon: de eigenschap een tautologie te zijn is erfelijk met betrekking tot de transformatieregels. (En alle vier de mogelijke uitgangspunten zijn tautologieën!).

Nu komt het tabelletje weer van pas. Er staan namelijk maar liefst vier formules in die geen tautologieën zijn! '$P \vee Q$' bijvoorbeeld is niet waar wanneer zowel *P* als *Q* niet waar zijn en is dus geen tautologische uitspraak. We mogen daarom concluderen dat de propositielogica consistent is.

Dit resultaat is, hoewel interessant op zichzelf, helaas nog niet voldoende voor het hoofddoel dat Whitehead en Russell zich hadden gesteld. Het is gebleken dat het niet mogelijk is om de volledige wiskunde te vertalen naar de logica, waarvan de propositielogica nog maar een deelgebied is. De vraag naar de consistentie van de wiskunde is dus nog allerminst beantwoord. Dat dit antwoord nooit gegeven zal kunnen worden, zal uiteraard blijken uit het resultaat van Gödel. Om dit uit te kunnen leggen, ga ik eerst even in op het begrip *meta-mathematica*.

Meta-mathematische uitspraken

De uitspraak 'dit systeem is consistent' is een voorbeeld van een *meta-mathematische* uitspraak. Dat zijn uitspraken die, als het ware van buitenaf, iets zeggen over een rekenkundig systeem. Een ander voorbeeld is de uitspraak '*A* is een bewijs van *B*', waarbij *B* een of andere stelling en *A* een reeks wiskundige uitspraken die vanaf de basisaxioma's tot de stelling *B* leiden. Let op: *A* en *B* zijn zelf geen meta-mathematische beweringen maar gewoon mathematische uitspraken. Er zit tussen mathematica en meta-mathematica een subtiel, maar belangrijk verschil. Als laatste voorbeeld: '*x* is een even getal' is een mathematische uitspraak, terwijl '"*x* is een even getal" valt in vijf symbolen te formuleren (*x* mod 2 = 0)' een meta-mathematische uitspraak is.

Gödel hield zich, zoals gezegd, bezig met de meta-mathematische vraag naar de consistentie van de wiskunde. Voor zijn bewijs is het onderscheid tussen de twee types uitspraken cruciaal. Om dit te verhelderen, en tevens als opwarmertje voor de stelling van Gödel, behandel ik de paradox van Richard. (Jules Richard was een Frans wiskundige, de paradox stamt uit 1905).

Stel we bekijken de gehele getallen groter dan of gelijk aan nul. We kunnen de rekenkundige eigenschappen van deze getallen in een taal, bijvoorbeeld het Nederlands, formuleren. Voorbeelden hiervan zijn 'niet deelbaar door een geheel getal, behalve 1 en zichzelf', of 'het product van een geheel getal met zichzelf'. Deze uitspraken kunnen worden geclassificeerd. Bijvoorbeeld door ze een nummer toe te kennen aan de hand van het aantal letters waar ze uit bestaan en de plaats van die letters in het alfabet. Het resultaat zal zijn dat met elke uitspraak ondubbelzinnig een geheel getal correspondeert.

Wat is hier nu de lol van? Het is nu mogelijk getallen tegen te komen die toevallig voldoen aan de onder hetzelfde getal geclassificeerde eigenschap. Bijvoorbeeld 17, als 17 het rangnummer blijkt van de uitspraak 'niet deelbaar door een geheel getal behalve 1 of zichzelf'. Anderzijds heb je natuurlijk ook getallen die hier niet aan voldoen, zoals 15, mocht dit getal horen bij 'product van een geheel getal met zichzelf'. Deze getallen noemen we Richardgetallen.

Misschien voelt iemand de bui al hangen. 'Is een Richardgetal', is zelf ook een uitspraak over de eigenschappen van getallen en zal dus ook een nummer toegekend krijgen. Laat dit nummer *n* zijn. De paradox volgt als we de vraag stellen: is *n* een Richardgetal? Zo nee, dan behoort *n* tot de getallen waar de uitspraak met hetzelfde rangnummer wél op van toepassing is. In dit geval is dat 'Is een Richardgetal' en zitten we dus in de knoei.

Deze redenering verliest zijn geldigheid wanneer we ons realiseren dat er ten onrechte geen onderscheid is gemaakt tussen mathematica en meta-mathematica. We zijn er stilzwijgend vanuit gegaan dat de te classificeren uitspraken over *zuiver rekenkundige* eigenschappen zouden zijn, met andere woorden, mathematische uitspraken. Deze uitspraken vallen in principe allemaal te formuleren puur met wiskundige symbolen. De uitspraak 'Is een Richardgetal' omvat echter meta-mathematische begrippen zoals het aantal tekens in een zekere (Nederlandstalige) uitspraak. De paradox van Richard blijkt dus alleen overeind te houden als we ook meta-mathematische uitspraken meenemen in de classificatie. Maar dan verliest deze zijn impact, de paradox zegt dan immers niets interessants meer over een wiskundig systeem *op zich*, maar slechts iets over een wiskundig systeem in combinatie met de Nederlandse taal en wie weet wat nog verder.

Gödel moest dus deze valkuil zien te ontwijken. Hiertoe voerde hij een ingenieuze manier in om van meta-mathematica te transformeren naar de mathematica.

Afbeelden van de meta-mathematica op de mathematica
We willen alle rekenkundige uitspraken afbeelden op de gehele getallen. Dit willen we omdat we dan de meta-mathematische uitspraken, die i.h.a. iets zeggen over de onderlinge relaties tussen rekenkundige uitspraken (denk aan het eerder genoemde voorbeeld '*A* is een bewijs van *B*') kunnen beschrijven als betrekkingen tussen getallen. De eerste stap zal noodgedwongen zijn om aan elk mathematisch symbool een getal toe te kennen. Welk symbool waaraan wordt toegekend, staat hieronder aangegeven.

Constanten '~' $\rightarrow$ 1, '$\vee$' $\rightarrow$ 2, '$\supset$' $\rightarrow$ 3, '$\exists$' $\rightarrow$ 4, '=' $\rightarrow$ 5, '0' $\rightarrow$ 6, 's' $\rightarrow$ 7, '(' $\rightarrow$ 8, ')' $\rightarrow$ 9, ',' $\rightarrow$ 10
Numerieke veranderlijken $x \rightarrow 11$, $y \rightarrow 13$, $z \rightarrow 17$, etc…
Volzinsveranderlijken $p \rightarrow 11^2$, $q \rightarrow 13^2$, $r \rightarrow 17^2$, etc…
Predikaatveranderlijken $\mathrm{P} \rightarrow 11^3$, $\mathrm{Q} \rightarrow 13^3$, $\mathrm{R} \rightarrow 17^3$, etc…

Niet eerder in dit artikel genoemd zijn 's', wat betekent 'de directe opvolger van', en $\exists$', wat staat voor 'Er is een...'. Om typografische redenen ben ik wat inconsequent met het gebruik van aanhalingstekenen, cursivering en dergelijke.
Gödel zelf gebruikte 7 constanten in plaats van 10. De predikaatveranderlijken dienen om de rekenkundige eigenschappen van getallen te coderen ('groter dan' bijvoorbeeld), maar introduceren niets wat niet d.m.v. de basisconstanten beschreven kan worden. Er geldt dat tekens die niet in de tabel genoemd zijn, vallen te schrijven in termen van tekens die wel in de tabel gedefinieerd zijn. Twee voorbeelden: '2' is te schrijven als 'ss0' en 'p . q' is te schrijven als '$\sim(\sim p \vee \sim q)$'
Gödels codering van mathematische uitspraken leunt op de eigenschappen van priemgetallen en kan misschien het snelst duidelijk worden gemaakt aan de hand van een voorbeeld:

$(\exists x) (x = \mathrm{s}y)$ codeert als $2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9$

Het (enorm grote) getal dat dit product oplevert, is een product van priemgetallen. Het getal heeft de handige eigenschap, waar ook dankbaar gebruik van wordt gemaakt in de cryptografie, dat deze delers er op een eenduidige manier weer uit los zijn te peuteren. De interpretatie van de delers is ook eenduidig. Vinden we als deler 3^4, dan weten we gelijk dat het tweede teken in de formule (3 is het tweede priemgetal als we de priemgetallen nummeren vanaf het priemgetal 2) wordt aangeduid met het Gödel-getal 4 en dus $\exists$' is.
Zoals ik eerder opmerkte, is het voordeel van het op de getallen afbeelden van de rekenkundige uitspraken dat meta-mathematische uitspraken kunnen worden

uitgedrukt in termen van relaties tussen getallen. Een voorbeeld: stel we hebben de meta-mathematische uitspraak "'($p \vee$ p)" is het begingedeelte van "($p \vee$ p) $\supset p$"'. Als nu '($p \vee$ p)' het Gödel getal *m* heeft en '($p \vee$ p) $\supset p$' het getal *n*, dan wordt de calculusversie van deze meta-mathematische uitspraak gevormd door '*m* is een deler van *n*', wat na even nadenken in te zien valt.

Om het bewijs van Gödel te formuleren, moet ik nog twee zaken introduceren. Ten eerste, met de meta-mathematische uitspraak 'De reeks formules met het Gödel-getal *x* vormt een bewijs voor de formule met het Gödel-getal *y*' correspondeert dankzij ons vernuftig afbeelden een rekenkundige relatie tussen het getal *x* en het getal *y*. Deze wil ik aanduiden met 'Bew(*x*,*y*)'. Om aan te tonen dat *x* inderdaad een bewijs vormt voor *y*, kan ik nu na gaan of de vergelijking 'Bew(*x*,*y*)' klopt voor een gegeven *x* en *y*. Na 'Bew(*x*,*y*)' ligt het voor de hand de uitspraak '*x* is *geen* bewijs voor *y*' te coderen met '~Bew(*x,y*)'.

Ten tweede wil ik een rekenkundige relatie 'Sub(*m*, 13, *n*)' tussen *m*, *n* en 13 invoeren. Deze dient als volgt te worden geïnterpreteerd. *m* is het Gödel-getal van een zekere vergelijking waarin de variabele *y* (Gödel-getal 13) in voorkomt. Omdat *y* uiteraard vrij te kiezen valt (want is een variabele), kan ik kijken naar de situatie waarin ik voor *y* een specifiek getal invul: *n*. De vergelijking die dit oplevert heeft zelf ook weer een Gödel-getal, aan te duiden met 'Sub(*m*, 13, *n*)'. Gödel zal hiervan een speciaal geval bekijken, het geval waarin *m* zelf wordt ingevuld voor *n*.

Ik zal dan nu (eindelijk?) zijn bewijs doornemen.

Het bewijs

Nagel en Newman geven het bewijs in vijf stappen met uitgebreide toelichting. Ik zal wat meer kleinere stapjes nemen, maar ook minder toelichting geven.

1. Begin met de uitspraak '~Bew(*x*,*z*)'. Deze stelt dat *x* geen bewijs vormt voor *z*.
2. Voer de notatie '(*x*)' in als 'voor alle *x*'. We moeten ons behelpen omdat we geen symbool ∀ hebben. Plakken we dit voor onze uitgangsformule, dan krijgen we '(*x*) ~Bew(*x*,*z*)', wat betekent dat *z* onbewijsbaar is.
3. We vullen nu 'sub(*y*,13,*y*)' voor *z* in. Wat ontstaat, is de bewering dat 'sub(*y*,13,*y*)' onbewijsbaar is.
4. Laat het Gödel-getal van '(*x*)~Bew(*x*,sub(*y*,13,*y*))' gelijk zijn aan *n*. Nu kunnen we de volgende uitdrukking construeren: '(*x*)~Bew(*x*,sub(*n*,13,*n*))'. Dit is een hele rare jongen. Het Gödel-getal van deze formule wordt namelijk gegeven door 'sub(*n*,13,*n*)'. Want 'sub(*n*,13,*n*)' duidt immers het Gödel-getal aan van de vergelijking die we kregen door in de vergelijking met het Gödel-getal *n*, voor *y* de waarde *n* in te vullen. Wat we nu effectief hebben is een vergelijking die over zichzelf beweert dat hij onbewijsbaar is!
5. Gödel richtte zich vervolgens op de rekenkundige formule die met '(*x*)~Bew(*x*,sub(*n*,13,*n*))' wordt aangeduid (en die ik vanaf nu G noem). Het is na enig doordenken in te zien dat G bewijsbaar, dus *waar*, is dan en slechts dan als ~G bewijsbaar is. G stelt immers 'G is niet bewijsbaar'. Daarnaast geldt dus ook dat G *onwaar* is dan en slechts dan als G *waar* is. Willen we dus met een

consistent systeem werken, waarin de situatie zich nooit voor mag doen dat een formule zowel als zijn ontkenning bewijsbaar is, dan is de enige mogelijkheid die overblijft dat G formeel onbeslisbaar is. We kunnen er, uitgaand van de axioma's, eenvoudigweg niet bij komen.
6. Let op: in stap 1 t/m 4 keken we naar G als meta-mathematische uitspraak, maar in stap 5 naar G als mathematische uitspraak. We hebben gezien dat de mathematica geen uitsluitsel geeft. Meta-mathematisch redenerend zien we echter snel in dat G waar moet zijn. Want wat hebben we in stap 5 vastgesteld? Dat het niet mogelijk de uitspraak 'deze uitspraak valt niet te bewijzen' te bewijzen.
7. Als we binnen een systeem een uitspraak hebben die waar is, maar waarvan de waarheid niet bewezen kan worden, dan is het systeem niet volledig. Zelfs als we G aan de axioma's zouden toevoegen, dan zou het probleem niet opgelost zijn. We kunnen gewoon weer bij stap 1 bovenaan beginnen en een nieuwe formule G' construeren die wel waar is maar onbewijsbaar. De axioma's van het rekenkundige systeem worden hierboven immers niet expliciet gegeven.
8. Tenslotte, als spectaculair sluitstuk, het volgende. De meta-mathematische uitspraak 'als de rekenkunde consistent is, is zij niet volledig' is niet alleen waar maar valt ook nog eens af te beelden op een bewijsbare rekenkundige formule. Eerder in dit artikel, toen ik het over de propositielogica had, heb ik aangetoond dat de uitspraak 'de rekenkunde is consistent' correspondeert met de uitspraak 'er is minstens 1 onbewijsbare formule in de rekenkunde'. In symbolen luidt dit '$(\exists y)(x) \sim \mathrm{Bew}(x, y)$', (vanaf nu aangeduid met A). De volledige uitspraak 'als de rekenkunde consistent...' wordt nu weergegeven met $A \supset G$, want van G hebben we hierboven ontdekt dat deze correspondeert met de bewering dat het systeem onvolledig is. Zoals gezegd, de rekenkundige relatie $A \supset G$, valt binnen de rekenkunde te bewijzen. Dat bewijs voert hier echter te ver. Wel wil ik nog vermelden wat $A \supset G$ zegt over A. We weten dat G onbewijsbaar is, indien de rekenkunde consistent is. Omdat A impliceert dat G waar is en een bewijs voor A dus een bewijs voor G vormt, kan het niet anders dan dat A ook onbewijsbaar is. Met andere woorden, de rekenkunde is alleen consistent wanneer deze consistentie niet te bewijzen valt!

Tenslotte

Gödel zelf, Alan Turing, en recenter nog Roger Penrose, hebben de stelling met veel meer in verband gebracht dan wiskunde alleen. Hij zou ook kunnen worden aangedragen als argument tegen de zgn. 'harde' Artificiële Intelligentie theorie die stelt dat het menselijke bewustzijn volledig kan worden nagebootst door programmeerbare machines. De stelling zegt dat dit onmogelijk is. Robots op basis van logische principes kunnen niet meta-mathematisch redeneren, wat mensen evident wel kunnen, zoals iedereen die het bovenstaande artikel heeft gelezen en begrepen illustreert.

Sinds ik vijf jaar geleden *shadows of the mind* van Penrose las blijft deze theorie over het verband tussen de stelling van Gödel en het menselijk bewustzijn door mijn hoofd spoken. Eerlijk gezegd kan ik er nog altijd geen chocola van maken. Het is goed mogelijk dat het niet meer is dan een zinledige redenering omdat we de begrippen die erin gehanteerd worden nog niet goed omschreven hebben. Hoe het ook zij, het resultaat van Gödel blijft om meerdere redenen intrigeren.

Literatuur

E. Nagel / J.R. Newman, *De stelling van Gödel*, 1975, het Spectrum B.V.
K. Gödel, *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*, 1992, Dover publications
R. Penrose, *shadows of the mind*, 1995, Vintage

Kurt Gödel (1906-1978 geboren in Hongarije) was niet alleen buitengewoon intelligent, hij was ook een bijzonder eigenaardig persoon. Zo publiceerde Gödel altijd zijn artikelen onder de naam K. Gödel. Pas na zijn dood wist het grote publiek waar de K voor stond. Vanaf 1940 werkte Gödel samen met Einstein op het Institute for Advanced Studies in Princeton. Toen hij naar Amerika kwam toonde hij terloops aan dat het legaal is volgens de Amerikaanse wet om een staatsgreep te plegen, wat hem bijna zijn Amerikaans staatsburgerschap koste. Hoewel Gödel en Einstein goede vrienden waren (ze liepen samen naar hun werk) heeft Gödel zich slechts één keer laten interesseren voor natuurkunde. Dat was toen hij Einstein tegenkwam in de wiskundebibliotheek (da's ook toevallig). Gödel veralgemeniseerde de veldvergelijkingen van de algemene relativiteitstheorie van Einstein. Hij toonde aan dat het heelal zou kunnen roteren, waardoor tijdreizen mogelijk zou zijn. Einstein vond dit zo'n grote onzin dat hij aan zijn eigen theorie begon te twijfelen. Ook heeft Gödel een bewijs voor het bestaan van God gegeven. Hij heeft dit alleen onder zijn eigen vrienden durven publiceren. Aan het eind van zijn leven dacht Gödel dat zijn eten vergiftigd werd en is hij van verhongering omgekomen.

Paul Friedel

Plakkende helften

Vincent van der Noort studeert wiskunde maar kan het niet laten zich te verwonderen over de (inderdaad soms wonderbaarlijke) wereld van de huis-tuin-en-keuken-fysica. Hij vraagt zich af waarom, als je iets in twee stukken breekt, zaagt of knipt, de helften niet aan elkaar blijven zitten als je ze weer tegen elkaar aanduwt.

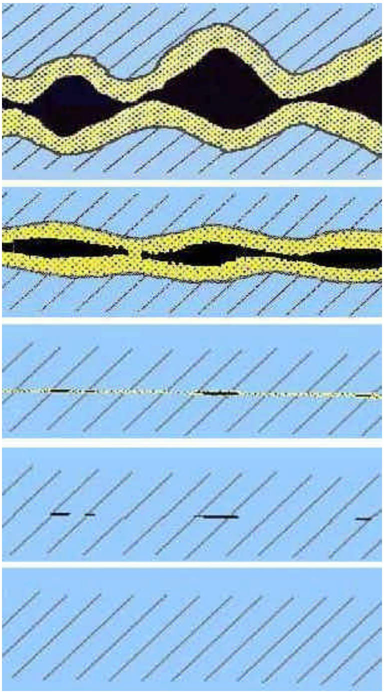
Elektronen enzo…

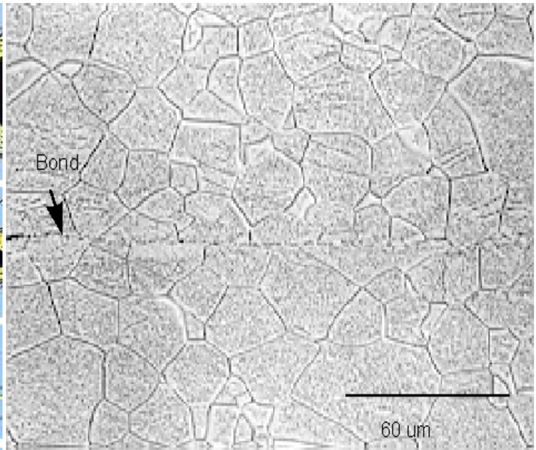
Het gemakkelijke antwoord op de vraag is: "Dûh, omdat er een breuk is gemaakt." Maar bij nader inzien gaat die vlieger niet op, want wat is er dan precies veranderd als er een breukvlak is? Zijn de krachten die binnen het materiaal werken soms niet van toepassing op de randen? Vaste stoffen blijven stabiel doordat de elektronen en de protonen van de moleculen en atomen niet exact gelijkmatig door het materiaal zijn verdeeld. Hierdoor gaan de verschillende delen van het materiaal elektrische krachten op elkaar uitoefenen. In een metaal is dit het extreemst, de valentie-elektronen vormen een zee waarin ze vrij kunnen bewegen, tussen het rooster van positieve metaalionen door. De bindingskrachten zijn erg groot, vandaar dat metalen over het algemeen zo hard zijn.

We komen nu aan bij het moeilijke antwoord op de vraag: de helften blijven wel degelijk plakken, maar dan moet je ze wel dicht genoeg bij elkaar houden. Als je onder normale omstandigheden twee stukken, zeg koper, tegen elkaar duwt, zal er nooit een voldoende groot contactvlak zijn om een binding te bewerkstelligen. Dit komt omdat het oppervlak van een metaal altijd ruw is en verontreinigingen bevat. Dit zorgt ervoor dat de twee delen nooit precies op elkaar passen. De oplossing is eenvoudig, als je maar hard genoeg duwt, kun je twee metalen relatief gemakkelijk aan elkaar plakken, zoals je ook twee stukken boter aan elkaar kunt plakken. Dit proces heet *diffusion bonding*. De reden dat dit proces niet plaatsvindt als je de bestek-la inruimt, is dat de temperatuur en druk erg hoog moeten zijn om voldoende 'versmelting' tussen de contactvlakken te krijgen. We hebben een grote druk nodig om de vlakken dicht tegen elkaar te brengen, zodat er diffusie kan plaatshebben. Diffusie in metalen gaat eigenlijk op dezelfde manier als bij gassen die zich vermengen, het duurt alleen nogal wat langer voordat twee stukken metaal volledig gemengd zijn. De diffusiecoëfficient (een maat voor de diffusiesnelheid) is evenredig met

$$D = D_0 e^{-Q/RT},$$

met Q de activatie-energie (de energie die het kost om een *site* binnen het kristalrooster vrij te maken), R de gasconstante en D_0 een constante die afhangt van de kristalstructuur. We zien dus dat de enige mogelijkheid om de diffusiecoëfficient te vergroten, het omhoog brengen van de temperatuur T is.





Links: Van boven naar beneden is schematisch te zien hoe de onder en bovenlaag langzaam vervormen en met elkaar versmelten.
Boven: In dit sample is te zien dat de materialen echt versmelten, de scheidingslijn is nauwelijks te zien.

In de illustratie is schematisch weergegeven hoe diffusion bonding in zijn werk gaat. Deze techniek lijkt op het eerste gezicht misschien vooral voer voor academici, maar met name in de luchtvaartindustrie en de elektronica wordt de techniek echt toegepast, met veel succes.

Bommen maken

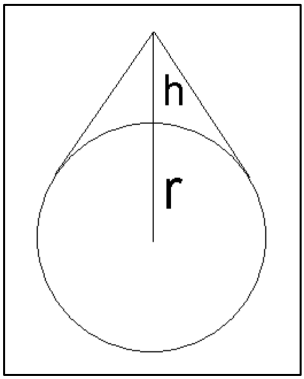
Een verwant probleem doet zich voor in de kernbom. Want, om een beetje knal te maken, wil je graag een hoeveelheid radioactieve materie hebben van boven de kritische dichtheid, zodat er een zichzelf onderhoudende kettingreactie kan plaatsvinden. Als je nu een gewoon een stuk uranium met kritische dichtheid in je kernbom stopt, ontpoft die al voor hij de fabriek uit is. Liever gezegd: je krijgt niet eens de kans om te beseffen dat je de kritische dichtheid gerealiseerd hebt, er is alleen nog BOEM. In de eerste atoombom (Hiroshima) werd dit opgelost door een klein stukje uranium in een bijna-kritische bal uranium te schieten. Dit was echter niet erg efficiënt, dus bedacht men een betere manier. De techniek die gebruikt werd in de tweede bom (Nagasaki) is zeer complex. Het idee is dat een sub-kritische bal uranium door een hele batterij explosieven aan de buitenkant van de bal ineen wordt geperst, waardoor de bal ongeveer een twee maal zo grote dichtheid krijgt. Deze techniek is zeer effectief gebleken. Het lijkt mij goed mogelijk om op deze manier bijvoorbeeld twee helften van een doorgezaagd fietsframe aan elkaar te plakken. Ik weet niet of het ook nog mogelijk is daarna op de fiets te rijden. Voer voor experimentatoren!

Charles Mathy

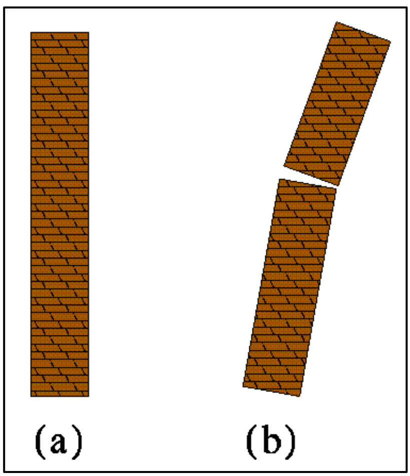
PUZZLES & RIDDLES

De Scoop-redactie blijkt verliefd te zijn op thema's en flitsende Engelse termen. Om deze rubriek een overlevingskans te geven in deze onzekere tijden is het thema deze keer "home, garden and kitchen physics". Je hebt weinig natuurkundekennis nodig, het zou me niets verbazen als de overgeschoolde natuurkunde studenten er meer moeite mee hebben dan de rest van de wereld: "so easy only a child can do it".
De winnaar van vorige keer is Milo van Handel. Hij is inmiddels vierdejaars wiskunde student, en heeft een zeer levendige en volledige uitwerking van alle puzzels ingeleverd. Gefeliciteerd, kom je prijs innen.
De best ingezonden oplossing wordt beloond met € 7,50 contant. Stuur je oplossing voor 1 januari 2004 op naar cjmmathy@science.uva.nl.

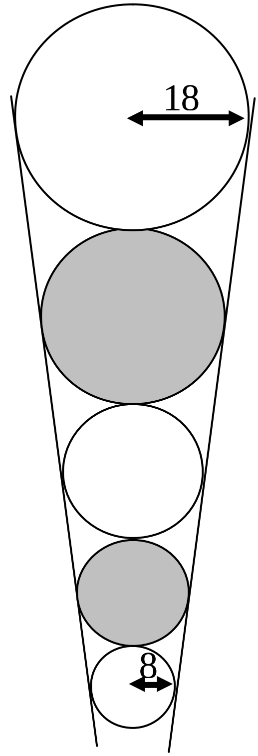
**** Hee Aarde, je broek zakt af**
Leg om de equator van de aarde een riem, en trek die strak aan. Stel dat je de riem een meter langer zou maken, ergens op een punt vast zou pakken, en dat punt op zou tillen totdat de riem weer strak staat. Hoe hoog boven het aardoppervlak moet je het punt dan optillen? Vind dus *h* in het figuur.
Neem aan dat de Aarde een perfecte bol is met een straal van 6400 km, en dat het materiaal van de riem niet elastisch is. Een schatting als antwoord is ook goed.



***** On top of old smokey**
Je hebt een schoorsteen die veel langer is dan die breed is. Hij heeft lengte l en breedte w. Hij begint te kantelen, en te vallen, en breekt af op een zekere hoogte. Op welke hoogte breekt hij af?



**** ... Biertje?**
Klaas zit in de trein en heeft net een flesje bier geopend. Hoeveel bier moet hij drinken zodat het flesje het meest stabiel op tafel staat? De tafel trilt vanwege de onregelmatigheden door het spoor.
Neem een fles van willekeurige vorm (bv. Heineken, misschien scoren we hier een sponsor mee), en neem ook aan dat de fles massa heeft.



**** Knikkergek**
Vijf knikkers van verschillende groottes worden in een conische koker geplaatst. Ieder knikker is in contact met de knikker onder en boven zich en met de rand van de koker. De kleinste knikker heeft een straal van 8 mm, de grootste een straal van 18 mm. Wat is de straal van de middelste knikker?

Oplossingen van de puzzels van het meinummer
De oude puzzels zijn te vinden op
http://www.science.uva.nl/student/scoop

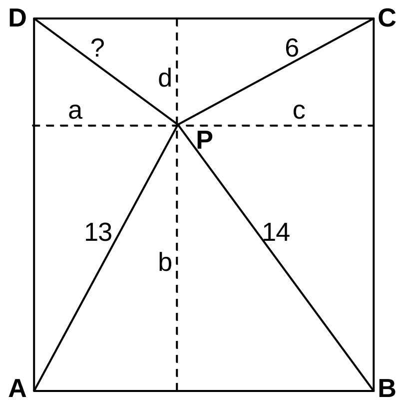
***** Weet ik veel
Definieer voor een geheel getal a: $\overline{a} \equiv a(\mathrm{mod}\ 7)$. Bekend (uit bijvoorbeeld Algebra 1) is dat vermenigvuldiging modulo een getal goed gedefinieerd is, dus $\overline{a \cdot b} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$. Dus eerst vermenigvuldigen en dan modulo werken, of eerst modulo werken en dan vermenigvuldigen geeft hetzelfde. Nu kunnen we de vermenigvuldigingstabel van 3 modulo 7 uitrekenen:

$$\overline{3} = \overline{3}$$
$$\overline{3^2} = \overline{2}$$
$$\overline{3^3} = \overline{3^2 \cdot 3} = \overline{2 \cdot 3} = \overline{-1}$$
$$\overline{3^4} = \overline{3^3 \cdot 3} = \overline{(-1) \cdot 3} = \overline{4}$$
$$\overline{3^5} = \overline{3^4 \cdot 3} = \overline{4 \cdot 3} = \overline{5}$$
$$\overline{3^6} = \overline{3^5 \cdot 3} = \overline{5 \cdot 3} = \overline{1}.$$

Voor hogere machten herhaalt de tabel zich. Nu is 123456789 deelbaar door 3 : Er geldt $123456789 / 3 = 41152263$. Dit is oneven, dus wordt het antwoord 6 :

$$\overline{3^{123456789}} = \overline{(3^3)^{4115263}} = \overline{(-1)^{41152263}} = \overline{-1} = \overline{6}$$

** Recht voor z'n raap
Het antwoord is 3, voor de uitwerking, zie de figuur:



De truc is, om de stippellijnen te tekenen. We zien dat
$PD^2 = a^2 + d^2$
$a^2 + b^2 = 169$
$b^2 + c^2 = 196$
$c^2 + d^2 = 36$

Als we nu de tweede en vierde vergelijking bij elkaar optellen en de derde daar weer vanaf trekken zien we dat
$PD^2 = 169 + 36 - 196$, dus PD = 3.

**** <u>The wheels on the bus</u>
Als het nummer van de bus 13 was, dan zou de leeftijd van meneer A 36 kunnen zijn (met kinderen van leeftijden 6,6,1 of 9,2,2) of 48 (met kinderen van leeftijden 6,2,2,2,1 of 3,4,4,1,1).
Als het nummer van de bus 13+n was, dan zouden dezelfde oplossingen met n extra kinderen van 1 jaar oud bewijzen dat 36 en 48 nog steeds geldige leeftijden zouden zijn.
Maar het nummer van de bus mag slechts één geldige leeftijd van meneer A toelaten, vanwege de laatste opmerking van meneer B. Dus het nummer van de bus moet kleiner dan 13 zijn.
Als het nummer van de bus kleiner is dan 12, dan kan men (door alles uit te proberen, of ‘slim’ uitproberen) nagaan dat men geen stel kinderen kan hebben met dezelfde som en product van leeftijden.
Als het nummer van de bus 12 is, dan kan meneer A leeftijd 48 hebben (6,2,2,2 en 3,4,4,1). En men kan nagaan (alweer uitproberen) dat als het busnummer 12 is, en de leeftijd is niet 48, er geen n-tal kinderen bestaat met de som van de leeftijden 12, en het product van de leeftijden hetzelfde.
Dus het busnummer is 12 en A is 48 jaar oud.

** <u>Matrices</u>
Antwoord: de enige mogelijke ordes zijn 1, 2, 3, 4, 6, en oneindig.

In ieder geval is het makkelijk in te zien dat 1, 2, en 4 alledrie inderdaad voorkomen, namelijk in de identiteitsmatrix, minus de identiteitsmatrix, en de 90 graden rotatiematrix.

Neem een willekeurige matrix A uit SL(2,$\mathbb{Z}$): $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Noem dan $t := Spoor(A) = a + d$.

Definieer nu recursief een rij getallen:

$B_1 = 1, B_2 = t, B_n = tB_{n-1} - B_{n-2}$.

Dan geldt voor een willekeurige macht van A

$$A^n = \begin{pmatrix} B_n a - B_{n-1} & B_n b \\ B_n c & B_n d - B_{n-1} \end{pmatrix}$$

Deze mooie formule is makkelijk inductief te bewijzen.

Nu gaan we bewijzen dat $B_{n+1} > B_n$ (strikt groter!) als $t \geq 2$. Dan weten we dat, als b of c ongelijk 0 zijn, de orde oneindig is. Kijk maar naar het getal rechtsboven of linksonder in A^n, dat wordt steeds groter, en wordt dus niet 0.
Bewijs: $B_1 = 1, B_2 = t > B_1$ want $t \geq 2$. Nu inductief :

$$B_{n+1} = tB_n - B_{n-1} \geq 2B_n - B_{n-1} = (B_n - B_{n-1}) + B_n > B_n$$

omdat $B_n - B_{n-1} > 0$ (inductiestap).
Voor $t \leq -2$ gaat het net zo. Namelijk, stel dat $t = Spoor(A) \leq -2$, dan is $Spoor(-A) \geq 2$. Dan hebben we net bewezen dat –A oneindige orde heeft.
Maar dan kan A geen eindige orde hebben. Want als $A^n = Id$ (identiteit), dan geldt $(-A)^{2n} = Id$, dus $-A$ zou eindige orde hebben.
We hoeven nu alleen de gevallen t = -1, 0, 1 te verifiëren. We vermelden hier alleen het resultaat.
$t = 0$: dan geldt $B_1 = 1, B_2 = 0, B_3 = 0, ..., B_{2n} = 0$ en $B_{2n+1} = (-1)^n$.
Hieruit kan men bewijzen dat 1 de enige mogelijke orde is.
$t = 1$: Ordes 1, 2 en 6.
$t = -1$: Ordes 3 en 4.

** <u>Rest</u>
Alleen 0, 2592, en 3888, bewijs:

Men kan aantonen dat de som van de cijfers van een 144-voud altijd een 9-voud is. De som van de cijfers van 144 is 9, en vermenigvuldigd met een natuurlijk getal blijft de som van de cijfers deelbaar door 9. We hoeven dan alleen 0, 9x144 etc. te proberen.
Tot hoever moeten we verifiëren? We schrijven het gezochte getal als $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 10^i$, n is dus het aantal cijfers. De som der cijfers is maximaal 9*n*. We vinden dus 144x9*n* als maximale grootte van het getal. Voor $n = 5$ is dit 6480, maar dit getal heeft slechts 4 cijfers! Voor nog grotere *n* wordt dit probleem alleen maar erger. Als een getal een oplossing is, mag het dus niet meer dan vier cijfers hebben. We hebben uiteindelijk de vergelijking

$$1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 144(a_3 + a_2 + a_1 + a_0).$$

We zien hieruit dat a_3 kleiner moet zijn dan 4, anders heeft bovenstaande vergelijking geen oplossing met $a_0, a_1, a_2 \leq 9$. We moeten nu alle getallen 9 x k x 144 uitproberen die kleiner zijn dan 4000. Dit zijn 0, 1296, 2592 en 3888. 1296 voldoet niet, de andere getallen wel.